完整证明：

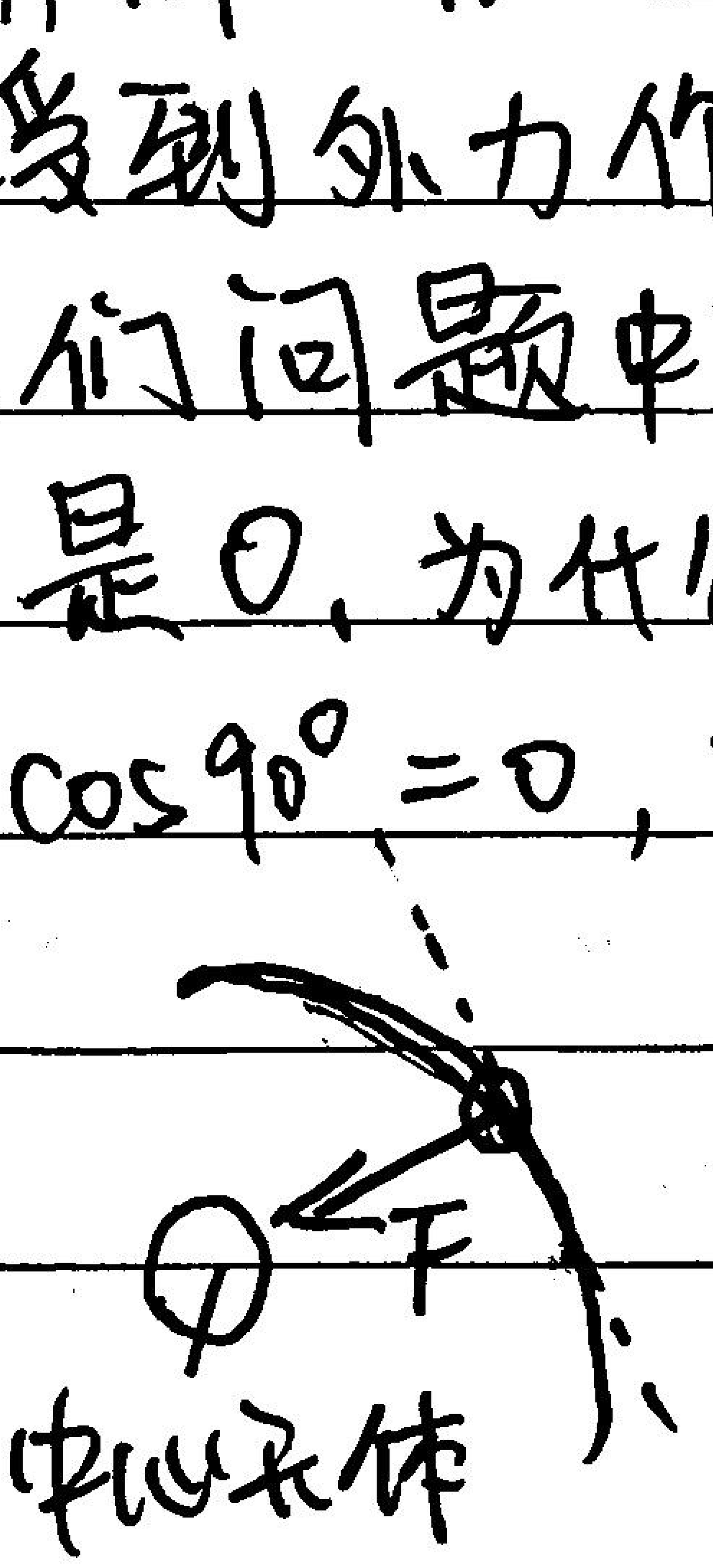
首先，构建方程是必要的过程。在引力场这样的中心力场中，只存在一个力，即引力自身，也可以理解为向心力。构建极坐标，以中心天体为原点，引力方向指向中心，这在极坐标的定义和物理意义上都为负值

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

然而我们缺少方程的半边。星体运行的轨迹在引力的表达式中也没有明确体现。想到利用万能的牛顿第二定律联系运动和力

$$F = -\frac{GMm}{r^2} = ma \Rightarrow a = \frac{GM}{r^2}$$

这会成为我们最大的跳板。思考还有没有什么已知条件被漏掉：在一个双星系统中，两个星体作为一个系统没有受到外力作用，所以系统的角动量守恒；类似地对于我们问题中运动的天体，中心天体对它加的torque是0，为什么？因为在轨迹的切向上没有力的分量，$\tau = F \cdot \cos 90° = 0$，因此角动量守恒。当然，我还没有数学上证明力与轨迹切线垂直，埋个小伏笔吧。



根据角动量守恒写出：　我们也不喜欢v，至少要转化成微分

$L = m\omega = mvr$，然而r并未被转化为极坐标。

转化结果：$\vec{r} = r\cdot\hat{r}$，r是向量模长，或者距离大小，$\hat{r}$是长度为1的单位向量，表明$\vec{r}$的方向。为了求v，对$\vec{r}$求导：

$$v = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\cdot\frac{d\hat{r}}{dt}\text{（乘积法则）}$$

然而我们完全不知道单位向量的导数在计算中有什么贡献。

试图转化它：

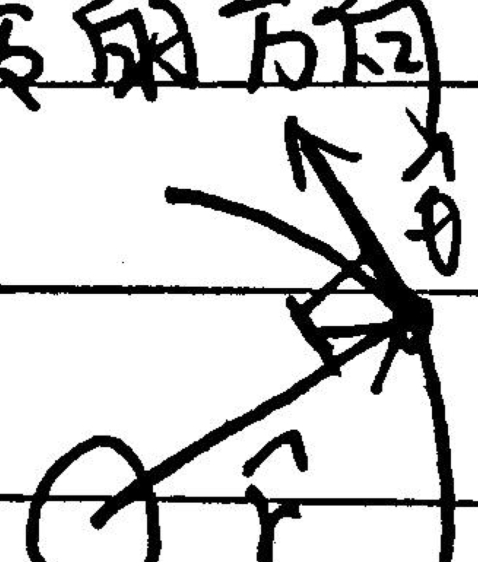
$$\hat{r} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\text{（来自单位向量定义）}$$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\cdot\dot{\theta}\\ \cos\theta\cdot\dot{\theta}\end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$$

注意到：$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix} = -\cos\theta\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$

两个向量点积为0，则互相垂直。

在物理意义上，$\hat{r}$是位置的方向，而与它垂直的向量表明它旋转的方向。如图所示，我们定义 $\hat{\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$，则



$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{\theta}\cdot\hat{\theta},\quad v = \dot{r}\hat{r} + r\cdot\dot{\theta}\hat{\theta}$$

继续求导，我们需要加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \frac{d}{dt}(r\cdot\dot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

$$= \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + r\dot{\theta}\cdot\frac{d\hat{\theta}}{dt}$$

同上一次一样，我们分析一下 $\hat{\theta}$

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \begin{pmatrix}-\cos\theta\cdot\dot{\theta} \\ -\sin\theta\cdot\dot{\theta}\end{pmatrix} = -\dot{\theta}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} = -\dot{\theta}\hat{r}$$

这里的代换得以进行是因为 $\hat{r}$ 正好就是这个向量定义的。

所以：

$$\vec{a} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

在牛二的应用中，我们只关心向心力，也就是法向量方向上的力，所以只有 $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 于我们有效。方程得以构建：

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{GM}{r^2}$$

然而，我们希望求 $r(\theta)$ 的表达式，这里的导数破坏了这一点。它引入了一个新的变量 t。考虑到我们还没使用过角动量守恒，对该式作变换：

$$L = mvr = m(r\dot{\theta}\hat{\theta})r = mr^2\dot{\theta}\hat{\theta} = constant$$

至于为什么将 v 换成了 $r\dot{\theta}\hat{\theta}$，参考先前的速度公式。由于角动量中的速度只是关于切向量方向上的速度（这是由定义决定的），所以只取了 $\hat{\theta}$ 前的部分。

由于 m 和 $\hat{\theta}$ 都是固定的，$r^2\dot{\theta} = constant$，我们将这个常量定义为比角动量，即 $h = r^2\dot{\theta}$，$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$，这似乎可以让我们消掉方程中的 θ，只剩 r，这是我们想看到的。

在这里，牛顿提出来了一个精妙的简化方法，用u代换r，具体原因最后再作讨论。所以：$\dot\theta = hu^2$。向原方程中代换：

$$\ddot r - r(hu^2)^2 = \ddot r - rh^2u^4 = \frac{GM}{r^2}$$

要求$\ddot r$，先求$\dot r$。为什么不用之前求出来的式子？因为需要通过u的代换使自变量统一

$$\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{du}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{d}{du}\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot\dot\theta = -\frac{1}{u^2}\cdot\frac{du}{d\theta}\cdot hu^2 = -h\frac{du}{d\theta}$$

$\ddot r = \frac{d}{dt}(\dot r) = \frac{d}{dt}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)$ 由于$-h$是常数

$$= -h\frac{d}{dt}\frac{du}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}\cdot\frac{du}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\cdot\dot\theta\cdot\frac{du}{d\theta}$$

$= -h\cdot\dot\theta\cdot\frac{d}{d\theta}\cdot\frac{du}{d\theta}$，注意到微分部分正好是二阶导

$= -h\cdot\dot\theta\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2}$，代回原方程

$$-h\dot\theta\cdot\frac{d^2u}{d\theta^2} - 2h^2u^4 = \frac{-GM}{r^2}$$

$$\Rightarrow -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - 2h^2u^4 = \frac{GM}{r^2}$$

$\Rightarrow -h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} - ru^2\right) = \frac{-GM}{r^2}$，由于 $r = \frac{1}{u}$

$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} - u = \frac{GM}{r^2u^2h^2} = \frac{GM}{h^2}$，即

$u'' - u = \frac{GM}{h^2}$（这几步多用链式求导法则）

这是一个标准的常系数二阶齐次微分方程，具体求解方法很容易找到，但过程繁琐，这里直接写出解：

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} + C\cos(\theta - \theta_0)$$

解中的C是微分方程求解中自然出现的常数，具体但值于系统具有的能量有关，随后解释；θ_0是相位，是在解的过程中用辅助角公式产生的，只和轨道的位置有关。

但总之我们还是想要$r(\theta)$，利于$r=\frac{1}{u}$，

$$r(\theta)=\frac{1}{\frac{GM}{h^2}+C\cos(\theta-\theta_0)}=\frac{\frac{h^2}{GM}}{1+\frac{Ch^2}{GM}\cos(\theta-\theta_0)}$$

这恰好满足圆锥曲线的极坐标表达式：

$$r(\theta)=\frac{P}{1+e\cos(\theta+\theta_0)}$$

其中，$P=\frac{h^2}{GM}$，$e=\frac{Ch^2}{GM}$。

现在解释C的值如何确定：对于这样的问题，总机械能有如下表达式和离心率e联系：

$$e=\sqrt{1+\frac{2Eh^2}{G^2M^2}}=\frac{Ch^2}{GM}$$

由此可知C的值。

我们既已经证明在中心引力场中天体的运动轨迹是圆锥曲线，但还没有解释为什么要用牛顿的$u=\frac{1}{r}$代换。尝试不使用代换，则该微分方程变为：

$$r\cdot r''-2(r')^2=r^2-\frac{GM}{h^2}r^3$$

这相当于 $u''+u=\frac{GM}{h^2}$ 难度高不止一两点。实际上，这个微分方程无法用初等函数直接求解。

总之，这彻底解开了为什么天体绕中心天体运动时必须是圆锥曲线的问题，也解决了我对于圆周运动为什么产生的问题，牛顿老人家的智慧果然高深莫测。

下次的主题是牛顿球壳定理，很有意思的积分问题。